TD 32 : Permutations

Dans tout ce TD, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Décomposition en produit de cycles

1 ★ Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints et en déduire leur signature :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2 ★★ Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations suivantes

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 ★★ On se place dans S_4 et on pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Décomposer σ^2 en produit de cycles à supports disjoints. On remarquera que σ^2 n'est pas un cycle. On dit que σ^2 est une double transposition.
2) Combien y a-t-il d'éléments (distincts) dans S_4 ? Les donner tous.

4 ★★ (*Ordre d'une permutation*) Soit $\sigma \in S_n$. On définit l'ordre de σ comme étant le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$ (on admet qu'un tel k existe toujours).

1) On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$. Déterminer l'ordre de σ.
2) Quel est l'ordre d'une transposition ? D'un 3-cycle ?
3) Quel est l'ordre d'un p-cycle ?
4) Quel est l'ordre de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$?
5) Soit p et q des entiers premiers entre eux supérieurs ou égaux à 2. Soit c_p et c_q deux cycles de longueurs respectives p et q, à supports disjoints. On pose $\sigma = c_p c_q$ Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \qquad \sigma^m = \mathrm{id} \iff pq \mid m$$

En déduire l'ordre de σ.

5 ★★★ Dans S_n, soit $c = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ un p-cycle et $\sigma \in S_n$. Montrer que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un p-cycle. Préciser les valeurs $b_1, \cdots, b_p \in [\![1,n]\!]$ telles que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_p \end{pmatrix}$.

Signature d'une permutation

6 ★ Montrer que pour tous $\sigma, \tau \in S_n$, les permutations τ et $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ ont la même parité.

7 ★★ Dans S_n, est-ce qu'il existe une permutation σ telle que $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$?

8 ★★ On note A_n l'ensemble des permutation paires de S_n.

1) Justifier que $(A_n, \circ)$ est un groupe. On l'appelle le groupe alterné de $[\![1,n]\!]$.
2) Quelles sont les permutations de A_3 ? et de A_4 ?
3) Montrer que les doubles transpositions de A_4 peuvent chacune s'écrire comme un produit de deux 3-cycles.
4) En déduire que toute permutation paire de S_n peut se décomposer en un produit de 3-cycles.

9 ★★★ On reprend la définition de l'ordre d'une permutation définie précédemment. Soit $\sigma \in S_{10}$ d'ordre 14.

1) Donner un exemple d'une telle permutation.
2) Montrer que σ est nécessairement impaire, puis déterminer le nombre de permutations d'ordre 14 de $\mathfrak{S}_{10}$.